ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE

1991

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

Dans tout ce problème f désigne une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes continue sur $]0, +\infty[$. On se propose d'étudier la transformation qui à f associe la fonction $T[f](x) = \int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\,dt$. On notera que lorsque cette transformée est définie, c'est une fonction impaire de x .

I

1. Trouver les valeurs du réel α pour lesquelles la transformée $T[f]$ de $f(t) = e^{-t}t^{\alpha}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Calculer cette transformée pour les valeurs 0 et 1 de α .

2. Dans cette question il sera utile de considérer $T[f]$ comme la limite de la suite de fonctions $T_n[f](x) = \int_{1/n}^{n} f(t)\sin(xt)dt$.

a) Montrer que si l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est absolument convergente, la transformée $T[f]$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |tf(t)|dt$ converge. Montrer que $T[f]$ est définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $T[f]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale.

c) Prouver que la fonction $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{t}$ vérifie la condition du **b)** et calculer sa transformée $T[f]$.

II

1. Montrer que la transformée de $f(t) = \dfrac{1}{t}$ est sur $]0, +\infty[$ une constante C dont on déterminera la valeur au 2.d.

2. a) Démontrer que la valeur de l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}dt$ ne dépend pas de l'entier n et préciser cette valeur.

b) Montrer que si ϕ est une fonction de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, la limite quand $n \to +\infty$ de l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \phi(t)\sin(nt)\,dt$ est 0 .

Tournez la page S.V.P.

c) Montrer que la fonction $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ peut être prolongée en 0 en une fonction $\phi(t)$ qui vérifie l'hypothèse du b). Préciser les valeurs de cette fonction et de sa dérivée en 0 .

d) On considère la fonction ϕ de c). En étudiant l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \phi(t)\sin((2n+1)t)\,dt$ déduire de ce qui précède la valeur de la constante C de la question 1.

3. On désire calculer la transformée $T[f]$ de la fonction $f(t) = \frac{1}{t(1+t^2)}$.

a) Montrer que $T[f]$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $(T[f])'(x) = \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$ pour $x > 0$.

b) Prouver que $T[f](x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} C$.

c) Démontrer que $T[f]$ admet une dérivée seconde sur $]0,+\infty[$ et qu'elle est sur cet intervalle solution de l'équation différentielle $y - y'' = C$. En déduire une expression simple de $T[f]$.

III

1. Soit $x \neq 0$ un réel fixé. On considère la fonction $2\pi-$ périodique qui pour $t \in [-\pi,+\pi]$ prend la valeur ch (xt) . Calculer ses coefficients de Fourier. Donner un énoncé précis de théorème établissant la convergence de sa série de Fourier.

En déduire l'égalité :

$$\coth(\pi x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2} .$$

2. a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé la série de fonctions de terme général $u_n(t) = e^{-nt}$, $n \geq 1$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$. Donner une expression simple de sa somme $g(t)$.

b) Soit $x > 0$ fixé. Calculer pour $y \in]0,1]$ la valeur de l'expression $v_n(y) = \int_y^{1/y} u_n(t)\sin(xt)\,dt$, $n \geq 1$, et déterminer $v_n(0) = \lim_{y\to 0_+} v_n(y)$. Etablir la convergence normale de la série de fonctions de terme général $v_n(y)$ sur $[0,1]$. Exprimer sa somme sous forme d'une intégrale lorsque $y \in]0,1]$.

c) Montrer que la transformée $T[g](x)$ de la fonction du a) est définie et l'exprimer sous forme de série en utilisant les résultats précédents. Déterminer la valeur de la somme de cette série en utilisant le résultat de la question 1.

3. Conclure au moyen de ce qui précède que la fonction $f(t) = (e^{t\sqrt{2\pi}}-1)^{-1} - (t\sqrt{2\pi})^{-1}$ vérifie la relation $f = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T[f]$.

FIN